BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

Session 2009

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série

SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LABORATOIRE

CHIMIE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS

Durée de l'épreuve : 3 heures

coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Une feuille de papier millimétré sera distribuée aux candidats. Elle sera réservée pour le problème.

Un formulaire de mathématiques sera distribué aux candidats.

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 (5 points)

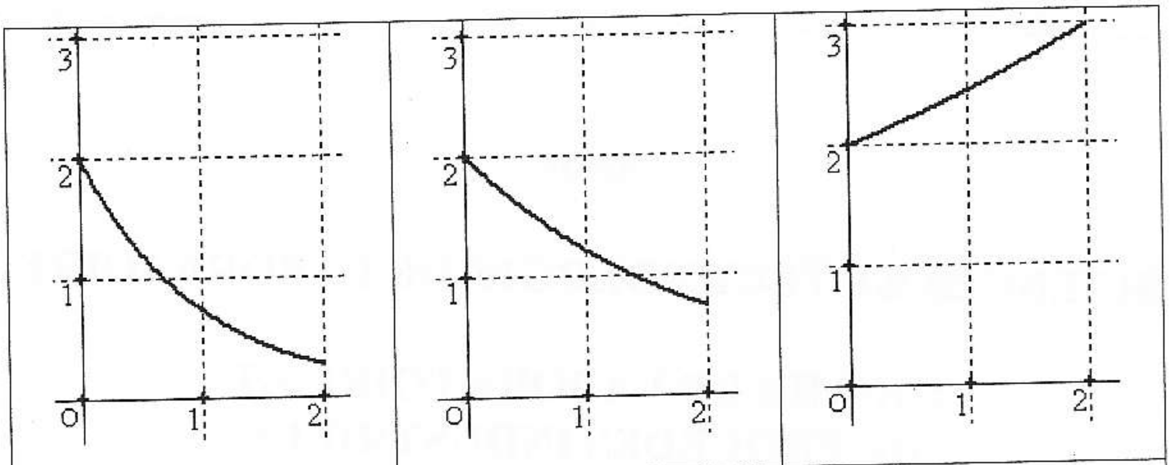
On considère l'équation différentielle

$$2y' + y = 0 \qquad (E),$$

où l'inconnue y est une fonction définie et dérivable sur **R**.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).
2) On note f la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(0) = 2$.

   Montrer que la fonction f est définie sur **R** par $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
3) On note M la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].
   Calculer M. On donnera la valeur exacte de M et son arrondi à 10^{-1} près.
4) La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2] est donnée par l'un des trois graphiques suivants :



Graphique 1	Graphique 2	Graphique 3

Quel est le graphique qui donne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2] ? On explicitera le raisonnement qui a conduit au choix de ce graphique.

Exercice 2 (6 points)

On note i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i\sqrt{3}\ ,\ z_B = \overline{z_A}\ ,\ z_C = 2.$$

1) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A , z_B , z_C .
2) Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
3) Placer les points A, B, C sur une figure.
4) Déterminer l'affixe du point A' symétrique du point A par rapport au point C.
5) Montrer que les points A, B, A' et O appartiennent à un même cercle de centre C. On précisera le rayon de ce cercle.
6) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que la droite (AC) est une médiane du triangle OAB .

Problème (9 points)

Soit f la fonction numérique définie sur **R** par $f(x) = x + e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = e^{-x}(xe^{x} + 1)$.
En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

3) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur **R**.

a) Calculer $f'(x)$.
b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
c) Etudier le signe de la fonction f' sur **R**.
d) Etablir le tableau de variations de la fonction f (on indiquera les limites).

4)

a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
b) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

5) Calcul d'aire

a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur **R**.
b) Soit $\mathscr{S}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie $\mathscr{S}$.
Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis son arrondi à 10^{-2} près.